$x+1/x$ и x^n+y^n. 7 июня

1. Пусть x и y — действительные числа, причём $x+y$ и xy — целые (рациональные) числа Докажите, что для каждого натурального n число x^n+y^n также целое (рациональное).

Следствие/напоминание. Пусть x — действительное число, причём $x+\frac{1}{x}$ — целое (рациональное). Тогда для каждого натурального n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ также целое (рациональное).

2. Пусть x — действительное число, причём $x-\frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что для каждого нечётного n число $x^n-\frac{1}{x^n}$ — целое.

3. Докажите, что для каждого натурального n число

$$\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[n]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

иррациональное.

4. Пусть p — рациональное число. Пусть s — корень уравнения $x^2+px+1=0$. Докажите, что для каждого натурального n найдётся такое рациональное p_n, что s^n — корень уравнения $x^2+p_nx+1=0$.

5. Положительные числа x и y, а также натуральное число n таковы, что $x^{n-1}+y^{n-1}=x^n+y^n=x^{n+1}+y^{n+1}$. Докажите, что $x=y$.

6. Пусть $x>1$. Докажите, что

$$\frac{x-x^{-1}}{1}<\frac{x^2-x^{-2}}{2}<\frac{x^3-x^{-3}}{3}<\ldots<\frac{x^n-x^{-n}}{n}<\ldots.$$

7. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Докажите, что существует такое вещественное число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2.

«Сириус», Эйлеровская математическая программа 2023, Э2–Э3

$x+1/x$ и x^n+y^n. 7 июня

1. Пусть x и y — действительные числа, причём $x+y$ и xy — целые (рациональные) числа Докажите, что для каждого натурального n число x^n+y^n также целое (рациональное).

Следствие/напоминание. Пусть x — действительное число, причём $x+\frac{1}{x}$ — целое (рациональное). Тогда для каждого натурального n число $x^n+\frac{1}{x^n}$ также целое (рациональное).

2. Пусть x — действительное число, причём $x-\frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что для каждого нечётного n число $x^n-\frac{1}{x^n}$ — целое.

3. Докажите, что для каждого натурального n число

$$\sqrt[n]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[n]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

иррациональное.

4. Пусть p — рациональное число. Пусть s — корень уравнения $x^2+px+1=0$. Докажите, что для каждого натурального n найдётся такое рациональное p_n, что s^n — корень уравнения $x^2+p_nx+1=0$.

5. Положительные числа x и y, а также натуральное число n таковы, что $x^{n-1}+y^{n-1}=x^n+y^n=x^{n+1}+y^{n+1}$. Докажите, что $x=y$.

6. Пусть $x>1$. Докажите, что

$$\frac{x-x^{-1}}{1}<\frac{x^2-x^{-2}}{2}<\frac{x^3-x^{-3}}{3}<\ldots<\frac{x^n-x^{-n}}{n}<\ldots.$$

7. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Докажите, что существует такое вещественное число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2.